

Mon cahier de terminale

Un extrait, tel qu'il est imprimé

Pages 20 et 21 : le premier atelier du livre.

Page 130 : la page de corrigés qui lui répond.

À imprimer et à faire : c'est une vraie séance, corrigé compris.

« Mon cahier de terminale », Cinq Marches, à paraître.
cinqmarches.fr

Atelier M01 — Le raisonnement par récurrence

Parcours P01 · mathématiques · 25 minutes · défi facultatif en plus

Ce que je vais savoir faire : je démontre par récurrence une propriété $P(n)$ en rédigeant l'initialisation, l'hérédité du rang n au rang $n + 1$, puis la conclusion.

Le brouillon

Martin, trois lignes au crayon, avec la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 4$:

$$u_1 = 3 \times 1 + 4 = 7 ; u_2 = 3 \times 7 + 4 = 25 ; u_3 = 3 \times 25 + 4 = 79$$

$$3^1 - 2 = 1 ; 3^2 - 2 = 7 ; 3^3 - 2 = 25 ; 3^4 - 2 = 79$$

$$u_n = 3^{n+1} - 2 : \text{« quatre valeurs, ça marche, donc c'est vrai pour tout } n \text{ »}$$

Émilie : « Et si elle tombait en panne au rang onze mille ? »

À partir de combien de cas une formule est-elle démontrée pour tous les entiers ?

Rappels — 5 min, sans aide

1. Calcule : 2^5 ; 3^4 .

2. Développe et réduis : $(n + 1)^2$.

3. Si $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 5$, calcule u_1 , u_2 , u_3 . Si $v_n = 4 \times 2^n$, calcule v_0 et v_3 .

4. Écris en décimal $1/10$; $1/100$; $1/1000$. De quel nombre se rapprochent-ils ?

Le cœur — 15 min

Ce qu'il faut savoir. Pour démontrer $P(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$: initialisation, on vérifie $P(n_0)$; hérédité, on suppose $P(n)$ vraie pour un entier n fixé quelconque et on démontre $P(n + 1)$; conclusion, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. Les trois se rédigent.

Des cas vérifiés, même nombreux, ne disent rien du cas suivant. L'hérédité fabrique la chaîne ; l'initialisation la fixe quelque part.

Exemple : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$, et l'on veut $u_n = 2^{n+1} + 1$. Initialisation : $2^1 + 1 = 3 = u_0$. Hérédité : si $u_n = 2^{n+1} + 1$, alors $u_{n+1} = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 1$. Conclusion : $u_n = 2^{n+1} + 1$ pour tout $n \geq 0$.

5. Pour la suite du brouillon, calcule u_4 et u_5 , puis vérifie que $3^{n+1} - 2$ donne les mêmes nombres.

6. Soit $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $P(n)$: « $u_n = 5 \times 2^n - 3$ ». Écris l'initialisation, puis, $P(n)$ supposée vraie, remplace u_n dans $2u_n + 3$ et conclus.

7. Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$.

8. Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, le nombre $4^n - 1$ est divisible par 3.

9. Soit $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = 0,5 v_n + 3$. Calcule v_1 et v_2 , puis démontre par récurrence que $v_n \leq 6$ pour tout $n \geq 0$.

10. Émilie étudie $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Elle vérifie $u_0 = 2^1 - 1$, puis montre que si $u_n = 2^{n+1} - 1$, alors $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$. Elle refuse de conclure : « L'hérédité suppose ce qu'il fallait démontrer : je tourne en rond. » Trouve son erreur, explique-la et écris le bon résultat.

Le défi — facultatif, 5 à 10 min

Reprends la suite du brouillon : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

a) Calcule u_6 à partir de u_5 , puis calcule $3^7 - 2$. Les deux nombres coïncident-ils ?

b) Démontre par récurrence que $u_n = 3^{n+1} - 2$ pour tout $n \geq 0$, en écrivant chaque ligne de calcul.

c) Explique ce que ta démonstration apporte de plus que les sept vérifications de u_0 à u_6 .

Mon score — 2 min

Avant de vérifier, je pense avoir : ____ / 10.

Après vérification — rappels : ____ / 4 · cœur : ____ / 6 · total : ____ / 10 · écart : ____

Défi : ☐ réussi ☐ commencé ☐ pas fait. Marche atteinte : ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Corrigés

Pour chaque exercice : la réponse, les étapes quand il y en a, le code de l'exercice et la marche visée. Pour le cœur, l'erreur la plus fréquente et une question d'aide ; pour le défi, les critères de réussite et une variante. Le parent ne corrige pas à la place de l'enfant : il pose la question d'aide, et l'enfant refait.

Corrigés — période 1

Atelier M01 — Récurrence

Brouillon. Aucun nombre de cas ne suffit. Les quatre vérifications de Martin sont justes, mais elles portent sur quatre entiers, pas sur tous : rien n'empêche la formule de tomber en panne au rang suivant. Ce qui démontre, c'est l'hérédité (le passage garanti d'un rang quelconque au suivant), fixée par l'initialisation. Erreur de vitesse : il a pris une accumulation d'indices pour une preuve.

Rappels

- $2^5 = 32$; $3^4 = 81$ — P01-M-E01 — marche 1.
- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ — P01-M-E02 — marche 1. *Au brouillon : cette identité servira dans les hérédités de la période ; si tu hésites, réécris-la trois fois.*
- $u_1 = 7$; $u_2 = 12$; $u_3 = 17$. $v_0 = 4 \times 1 = 4$; $v_3 = 4 \times 8 = 32$ — P01-M-E03 — marche 1.
- 0,1 ; 0,01 ; 0,001 : ils se rapprochent de 0 — P01-M-E04 — marche 1. *Au brouillon : cette question prépare l'atelier M02, consacré aux limites. Regarde le sens de la descente, pas les trois nombres.*

Cœur

- $u_4 = 3 \times 79 + 4 = 241$; $u_5 = 3 \times 241 + 4 = 727$. Formule : $3^5 - 2 = 243 - 2 = 241$ et $3^6 - 2 = 729 - 2 = 727$ — P01-M-E05 — marche 1. *Erreur fréquente : calculer $3^5 - 2$ pour u_5 en oubliant que l'exposant est $n + 1$. Question d'aide : « Pour $n = 4$, que vaut $n + 1$? »*
- Initialisation : $5 \times 2^0 - 3 = 5 - 3 = 2 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie. Hérédité : si $u_n = 5 \times 2^n - 3$ pour un entier n fixé, alors $u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2(5 \times 2^n - 3) + 3 = 10 \times 2^n - 6 + 3 = 5 \times 2^{n+1} - 3$: c'est $P(n+1)$. Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$ — P01-M-E06 — marche 3. *Erreur fréquente : remplacer u_n par un nombre, au lieu de la formule supposée. Question d'aide : « Qu'est-ce que l'hypothèse te permet d'écrire à la place de u_n ? »*
- Initialisation : pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite $1 \times 2/2 = 1$. Hérédité : si $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$, on ajoute $n+1$: $n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)(n/2 + 1) = (n+1)(n+2)/2$, formule au rang $n+1$. Conclusion : l'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$ — P01-M-E07 — marche 3. *Erreur fréquente : développer tout au lieu de mettre $(n+1)$ en facteur, et se perdre. Question d'aide : « Quel facteur est commun aux deux termes que tu additionnes ? »*
- Initialisation : $4^0 - 1 = 0$, divisible par 3. Hérédité : si $4^n - 1 = 3k$ avec k entier, alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(4^n - 1) + 3 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$, multiple de 3. Conclusion : $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout $n \geq 0$ — P01-M-E08 — marche 4. *Au brouillon : l'astuce tient dans $4 \times 4^n - 1 = 4(4^n - 1) + 3$; vérifie-la en développant. Erreur fréquente : écrire « $4^n - 1$ divisible par 3 » sans le traduire par une égalité. Question d'aide : « Comment écris-tu qu'un nombre est un multiple de 3 ? »*
- $v_1 = 0,5 \times 5 + 3 = 5,5$; $v_2 = 0,5 \times 5,5 + 3 = 5,75$. Initialisation : $v_0 = 5 \leq 6$. Hérédité : si $v_n \leq 6$, alors $0,5 v_n \leq 3$, donc $v_{n+1} = 0,5 v_n + 3 \leq 6$. Conclusion : $v_n \leq 6$ pour tout $n \geq 0$ — P01-M-E09 — marche 4. *Erreur fréquente : partir de $v_{n+1} \leq 6$ et remonter vers v_n . Question d'aide : « Tu pars de quelle inégalité, et quelle opération fais-tu aux deux membres ? »*
- Émilie a refusé de conclure alors que tout est démontré. L'hérédité ne suppose pas la formule vraie pour tout n , ce qui serait tourner en rond : elle suppose $P(n)$ pour un entier n fixé et démontre que $P(n)$ entraîne $P(n+1)$.