

Mon cahier de 1re

Un extrait, tel qu'il est imprimé

Pages 20 et 21 : le premier atelier du livre.

Page 130 : la page de corrigés qui lui répond.

À imprimer et à faire : c'est une vraie séance, corrigé compris.

« Mon cahier de 1re », Cinq Marches, à paraître.
cinqmarches.fr

Atelier M01 — La forme canonique d'un trinôme

Parcours P01 · mathématiques · 25 minutes · défi facultatif en plus

Ce que je vais savoir faire : je mets un trinôme sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, je la vérifie en développant et j'y lis le sommet, l'axe et l'extremum de la parabole.

Le brouillon

Sur la feuille de Martin, trois lignes écrites en une minute :

$$x^2 - 6x + 5$$

$$= (x - 3)^2 + 5$$

« sommet S(3 ; 5) »

Émilie développe la deuxième ligne : $(x - 3)^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 + 5 = x^2 - 6x + 14$. Ce n'est pas la fonction de départ : le 9 est entré dans le calcul et n'en est jamais ressorti.

Comment transformer $ax^2 + bx + c$ en $a(x - \alpha)^2 + \beta$ sans changer la fonction ?

Rappels — 5 min, sans aide

1. Développe : $(x - 4)^2$.

2. Développe : $2(x + 3)^2 - 7$.

3. Résous : $5x - 3 = 2x + 9$.

4. Calcule : $5^2 - 4 \times 2 \times 3$.

Le cœur — 15 min

Ce qu'il faut savoir. Tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, s'écrit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = f(\alpha)$: c'est la forme canonique.

Exemple : pour $x^2 - 6x + 1$, $\alpha = 3$ et $\beta = 9 - 18 + 1 = -8$, donc $x^2 - 6x + 1 = (x - 3)^2 - 8$. Contrôle : $(x - 3)^2 - 8 = x^2 - 6x + 9 - 8 = x^2 - 6x + 1$.

On y lit la parabole : sommet S(α ; β), axe d'équation $x = \alpha$; si $a > 0$, β est le minimum de f , si $a < 0$, son maximum. Le développement final n'est pas facultatif : c'est la seule preuve que rien n'a été perdu.

5. Donne a , b et c pour : $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; $g(x) = -x^2 + 4x$; $h(x) = 3x^2 - 7$; $k(x) = -4x^2 + x + 9$.

6. Calcule $\alpha = -b/(2a)$ pour : $x^2 - 8x + 3$; $2x^2 + 12x - 1$; $-x^2 + 5x + 2$; $3x^2 - 4x$.

7. Écris sous forme canonique, puis vérifie en développant : $x^2 - 6x + 5$; $x^2 + 4x - 1$; $x^2 - 10x + 21$.

8. Même travail lorsque $a \neq 1$: $2x^2 - 12x + 13$; $-x^2 + 6x - 5$.

9. Sans rien développer, donne le sommet, l'axe de symétrie, la nature et la valeur de l'extremum : $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$; $g(x) = -(x + 1)^2 + 7$.

10. Émilie écrit $3x^2 - 12x + 7 = (x - 2)^2 - 5$: « $\alpha = 2$ et $\beta = f(2) = -5$, et une forme canonique s'écrit $(x - \alpha)^2 + \beta$, comme dans mes trois exemples. » Trouve son erreur, explique-la, corrige.

Le défi — facultatif, 5 à 10 min

On reprend la fonction du brouillon : $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

a) Écris f sous forme canonique ; donne le sommet de la parabole et l'équation de son axe. Résous ensuite $f(x) = 5$.

b) Martin affirme que $f(x)$ ne peut jamais valoir -5 . A-t-il raison ? Justifie à partir de la forme canonique, sans aucun essai numérique.

Mon score — 2 min

Avant de vérifier, je pense avoir : ____ / 10.

Après vérification — rappels : ____ / 4 · cœur : ____ / 6 · total : ____ / 10 · écart : ____

Défi : ☐ réussi ☐ commencé ☐ pas fait. Marche atteinte : ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Brouillon

Corrigés

Pour chaque exercice : la réponse, les étapes quand il y en a, le code de l'exercice et la marche visée. Pour le cœur, l'erreur la plus fréquente et une question d'aide ; pour le défi, les critères de réussite et une variante. Le parent ne corrige pas à la place de l'enfant : il pose la question d'aide, et l'enfant refait.

Corrigés — période 1

Atelier M01 — La forme canonique

Brouillon. $(x - 3)^2 + 5 = x^2 - 6x + 14$, alors que le trinôme de départ vaut $x^2 - 6x + 5$. Le carré $(x - 3)^2$ apporte déjà un 9 : il faut le retrancher, puis ajouter le 5. $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$, et le sommet est $S(3 ; -4)$. La méthode : $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = f(\alpha)$, puis un développement de contrôle. Martin a sauté ce contrôle : erreur de vitesse.

Rappels

1. $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ — P01-M-E01 — marche 1.
2. $2(x + 3)^2 - 7 = 2(x^2 + 6x + 9) - 7 = 2x^2 + 12x + 18 - 7 = 2x^2 + 12x + 11$ — P01-M-E02 — marche 2. *Erreur fréquente : ne multiplier par 2 que le x^2 , et écrire $2x^2 + 6x + 2$.*
3. $5x - 3 = 2x + 9$ donne $3x = 12$, donc $x = 4$ — P01-M-E03 — marche 1.
4. $5^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$ — P01-M-E04 — marche 1. *Au brouillon : cette forme $b^2 - 4ac$ est celle de l'atelier M02, le discriminant. Le carré d'abord, le produit ensuite, la soustraction en dernier.*

Cœur

5. $f : a = 2, b = -5, c = 1 \cdot g : a = -1, b = 4, c = 0 \cdot h : a = 3, b = 0, c = -7 \cdot k : a = -4, b = 1, c = 9$ — P01-M-E05 — marche 1. *Au brouillon : un coefficient absent vaut 0, et le signe appartient au coefficient. Erreur fréquente : écrire $b = 5$ pour $2x^2 - 5x + 1$, ou oublier $c = 0$ pour g . Question d'aide : « Le signe placé devant $5x$ fait-il partie du coefficient ? Quel est le coefficient d'un terme qui n'est pas écrit ? »*
6. $x^2 - 8x + 3 : \alpha = 8/2 = 4 ; 2x^2 + 12x - 1 : \alpha = -12/4 = -3 ; -x^2 + 5x + 2 : \alpha = -5/(-2) = 2,5 ; 3x^2 - 4x : \alpha = 4/6 = 2/3$ — P01-M-E06 — marche 2. *Erreur fréquente : diviser par 2 au lieu de $2a$, ou oublier le signe moins de $-b$. Question d'aide : « Combien vaut $2a$ pour ce trinôme ? As-tu changé le signe de b ? »*
7. $x^2 - 6x + 5 : \alpha = 3, \beta = 9 - 18 + 5 = -4$, donc $(x - 3)^2 - 4$; contrôle : $x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$. $x^2 + 4x - 1 : \alpha = -2, \beta = 4 - 8 - 1 = -5$, donc $(x + 2)^2 - 5$; contrôle : $x^2 + 4x + 4 - 5 = x^2 + 4x - 1$. $x^2 - 10x + 21 : \alpha = 5, \beta = 25 - 50 + 21 = -4$, donc $(x - 5)^2 - 4$; contrôle : $x^2 - 10x + 25 - 4 = x^2 - 10x + 21$ — P01-M-E07 — marche 3. *Au brouillon : β se calcule en remplaçant x par α dans la fonction de départ, pas en recopiant c . Erreur fréquente : recopier c comme Martin, et écrire $(x - 3)^2 + 5$. Question d'aide : « Combien vaut $f(\alpha)$? Ton développement redonne-t-il le trinôme de départ ? »*
8. $2x^2 - 12x + 13 : \alpha = 12/4 = 3, \beta = 2 \times 9 - 36 + 13 = -5$, donc $2(x - 3)^2 - 5$; contrôle : $2x^2 - 12x + 18 - 5 = 2x^2 - 12x + 13$. $-x^2 + 6x - 5 : \alpha = -6/(-2) = 3, \beta = -9 + 18 - 5 = 4$, donc $-(x - 3)^2 + 4$; contrôle : $-x^2 + 6x - 9 + 4 = -x^2 + 6x - 5$ — P01-M-E08 — marche 4. *Au brouillon : le a sort devant le carré et y reste. Erreur fréquente : oublier le 2 devant le carré, ou le signe moins devant $-(x - 3)^2$. Question d'aide : « En développant ta forme, retrouves-tu $2x^2$, ou seulement x^2 ? »*
9. f : sommet $S(3 ; -5)$, axe d'équation $x = 3$; $a = 2 > 0$, donc minimum -5 , atteint en $x = 3$. g : sommet $S(-1 ; 7)$, axe d'équation $x = -1$; $a = -1 < 0$, donc maximum 7 , atteint en $x = -1$ — P01-M-E09 — marche 3. *Au brouillon : dans $a(x - \alpha)^2$, l'écriture retourne déjà le signe de a . Erreur fréquente : donner 1 pour abscisse du sommet de g , ou parler de minimum pour g . Question d'aide : « $(x + 1)^2$, c'est $(x - \alpha)^2$ avec α égal à quoi ? Quel est le signe de a ? »*